

# 基于 DCT 过完备字典和 MOD 算法的图像去噪方法\*

杨 俊 谢勤岚

(中南民族大学生物医学工程学院 武汉 430074)

**摘 要** 文章介绍了一种 DCT 过完备字典和 MOD 算法相结合的图像稀疏表示去噪算法。首先将噪声图像分成小图像块,并运用正交匹配跟踪算法(OMP)在图像的初始化 DCT 过完备字典上对小图像块进行稀疏分解;然后使用 MOD 字典学习算法对 DCT 过完备字典进行更新;最后重复该过程以获得图像的稀疏表示并重构图像。试验结果表明:该方法在实现图像去噪的同时,其去噪性能比传统的方法更有优势。

**关键词** 图像去噪;稀疏表示;DCT 字典;正交匹配算法;MOD

**中图分类号** TP391.41

## Image Denoising Method Based on DCT Over-Complete Dictionary and the MOD Algorithm

YANG Jun XIE Qinlan

(College of Biomedical Engineering, South-Central University for Nationalities, Wuhan 430074)

**Abstract** A kind of image denoising algorithm based on DCT over-complete dictionary and the MOD algorithm is introduced in this paper. Firstly, the noise image is segmented to some smaller image blocks, then the blocks are decomposed by OMP algorithm with the initialized DCT over-complete dictionary. Secondly, the DCT over-complete dictionary is updated by the MOD dictionary learning algorithm. Finally, this process is repeated to get the sparse representation of the image and then reconstruction to noise image. The experiment results show that this algorithm is more effective for image denoising than some traditional methods.

**Key Words** image denoising, sparse representation, DCT over-complete dictionary, OMP, MOD

**Class Number** TP391.41

### 1 引言

在数字图像获取和传输的过程中,受到设备和外部环境的影响,往往会使图像染上噪声。因此图像去噪成为了图像处理中的一个重要环节,噪声图像可以模型化为

$$g(x, y) = f(x, y) + n(x, y) \quad (1)$$

其中  $g(x, y)$  为含噪图像,  $n(x, y)$  为噪声项,  $f(x, y)$  为原始图像。

对于数字图像而言,稀疏性、特征保持性以及可分性,是衡量图像数据表示能力与恢复能力的三个主要属性<sup>[1]</sup>。传统的去噪方法,如小波去噪方法<sup>[2-3]</sup>等,往往只是针对信号的高频部分进行滤波以滤除噪声信号,这类方法在去除噪声的同时也消除了图像在高频部分的有用信息,无法保证图像的特征保持性和可分性。Mallat 和 Zhan<sup>[4]</sup> 首先于 1993 年提出了信号在过完备字典上分解的思想:将信号分解在一组过完备的非正交基上,分解的结果,是可以得到信号的稀疏表示系数,此过程称为信号的稀疏分解。基于过完备字典的图像稀疏表示方法能够同时满足数字图像的三个属性。由于信号稀疏表示的优良特性,信号稀疏表示已被应用到信号处理的许多方面,如信号去噪,编码和识别等。

本文将字典学习算法与图像稀疏分解算法相结合,首先在过完备 DCT 字典上对原始图像进行稀疏分解,然后用所得到的稀疏分解结果,运用字典学习算法更新 DCT 字典。以上过程经过一定次数的重复迭代之后,可得到原始图像的稀疏表示矩阵,最后利用噪声信号在过完备字典上的非稀疏性对原始图像进行去噪。由于用于稀疏分解的过完备字典来源于原始图像数据,该方法可以获得更加良好的图像去噪与重构效果。

### 2 图像的稀疏表示理论

设数字图像  $s \in R^N$ , 其大小为  $\sqrt{N} \times \sqrt{N}$ , 字典  $D$  为  $L$  个  $N$  维向量  $d_r$  的集合, 即  $D = \{d_r \in R^N \mid \|d_r\| = 1, 1 \leq r \leq L\}$ , 其中  $D$  的每一个元素  $d_r$  称为字典原子。在给定字典的情况下, 可以将图像  $s$  分解为该字典各原子的线性组合:

$$s = \sum_{r=1}^L \alpha_r d_r + R^{(M)} \quad (2)$$

其中,  $\alpha = \{\alpha_r, 1 \leq r \leq L\}$  为图像  $s$  在字典  $D$  上的分解系数,  $R^{(M)}$  是经过  $M$  项逼近后的残余项。如果字典  $D$  中的原子能够张成  $N$  维欧氏空间  $R^N$ , 即  $\text{span}\{d_r \in D\} = R^N$ , 则称  $D$  为完备字典; 当原子个数  $L > N$  时, 字典  $D$  是冗余的, 如果

\* 收稿日期:2011 年 11 月 17 日,修回日期:2011 年 12 月 23 日

基金项目:湖北省自然科学基金项目(编号:2010CDZ057)资助。

作者简介:杨俊,男,硕士研究生,研究方向:图像处理与模式识别。谢勤岚,男,教授,研究方向:计算机视觉与模式识别、医学图像处理。

还能同时张成  $N$  维欧氏空间  $R^N$ , 则称此时的字典  $D$  是过完备的, 在这种字典基础上的分解系数  $\alpha$  是不唯一的。从众多的分解系数中选取最为稀疏的系数, 可采用  $L_0$  范数进行度量, 可以建立如下的图像过完备稀疏表示模型:

$$\min \|\alpha\|_0 \quad st. \quad s = \sum_{\gamma=1}^L \alpha_{\gamma} d_{\gamma} \quad (3)$$

式中,  $\|\alpha\|_0$  是  $\alpha$  的  $L_0$  范数, 表示非零元素个数。过完备问题的求解等价于寻求欠定系统的最稀疏解。因此, 首先必须考虑的问题是最稀疏解是否唯一。对于一个含噪图像  $s \in R^N$ , 一般情况下并不需要完全准确的对其重构表达, 较为精确的稀疏逼近即可满足要求, 因此, 该问题可以转换为相应的稀疏逼近<sup>[5]</sup>问题:

$$\min \|\alpha\|_0 \quad st. \quad \|s - D\alpha\| \leq \epsilon \quad (4)$$

式中,  $\epsilon$  为稀疏逼近误差,  $D$  为稀疏字典, 当  $\epsilon = 0$  时即为稀疏表示问题。

### 2.1 正交匹配跟踪算法(OMP)

基于  $L_0$  范数的非凸性, 对于上式来说, 如何求唯一解是一个典型的 NP 难问题。为此, 众多学者提出了多种有效的稀疏分解算法, 主要有 MP<sup>[4]</sup>、OMP<sup>[6]</sup>、BP<sup>[7]</sup> 等。其中 MP 算法最先被引入。OMP 是 MP 算法的一种改进, 算法用 Gram-Schmidt 正交化将投影方向正交化来改进匹配跟踪逼近。

给定字典  $D = \{g_{\gamma}\}_{\gamma \in \Gamma}$ , 且  $\|g_{\gamma}\|_2 = 1$ , 利用正交匹配跟踪对信号  $s$  进行分解的过程如下。设定初始值  $R^0 s = s$ , 信号首先被分解为

$$R^0 s = \langle g_{\gamma_0}, R^0 s \rangle g_{\gamma_0} + R^1 s \quad (5)$$

其中  $g_{\gamma_0}$  为字典中与信号残差最小的原子, 即展开信号与原子  $g_{\gamma_0}$  的内积最大。

$$g_{\gamma_0} \quad st. \quad \langle R^0 s, g_{\gamma_0} \rangle = \max_{\gamma \in \Gamma} |\langle R^0 s, g_{\gamma} \rangle| \quad (6)$$

同理,

$$g_{\gamma_m} \quad st. \quad \langle R^m s, g_{\gamma_m} \rangle = \max_{\gamma \in \Gamma} |\langle R^m s, g_{\gamma} \rangle| \quad (7)$$

原子选定以后, 采用 Gram-Schmidt 算法对原子进行 Gram-Schmidt 正交化处理。即,

$$u_m = g_{\gamma_m} - \sum_{p=0}^{m-1} \frac{\langle g_{\gamma_m}, u_p \rangle}{\|u_p\|_2} u_p \quad (8)$$

此时, 残差  $R^m s$  投影在  $u_m$  上, 得

$$R^m s = \frac{\langle R^m s, u_m \rangle}{\|u_m\|_2} u_m + R^{m+1} s \quad (9)$$

上述过程经过  $M$  此迭代后, 信号可以表示为

$$s = \sum_{m=1}^{M-1} \frac{\langle R^m s, u_m \rangle}{\|u_m\|_2} u_m + R^M s \quad (10)$$

其中,  $M < S$ ,  $S$  为信号空间的维数。假如  $M = S$ ,

$$s = \sum_{m=1}^{M-1} \frac{\langle R^m s, u_m \rangle}{\|u_m\|_2} u_m \quad (11)$$

### 2.2 MOD 算法

稀疏表示中, 除了稀疏分解之外, 过完备词典的构造也是非常重要的。Engan et al. 最先提出一种字典学习算法, 并称之为最优方向算法(MOD)<sup>[8]</sup>。MOD 算法将方程式(4)中的问题作为一个最优化问题。在算法迭代的每一步, 都运用上一步的字典进行稀疏表示来获得一个稀疏矩阵, 随后运用最小二乘法来获得下一个新的字典。

字典学习的核心问题是, 当已知  $\alpha_i$  的情况下, 希望得

到系数表示字典  $D$  的时候, 求解如下问题,

$$\min_{D, \{\alpha_i\}_{i=1}^M} \sum_{i=1}^M \|s_i - D\alpha_i\|_2^2 \quad subject \quad to \quad \|\alpha_i\|_0 \leq k_0, 1 \leq i \leq M \quad (12)$$

其中  $k_0$  为表示系数中非零元素的个数,  $M$  为字典  $D$  中原子的个数。

MOD 算法中采用最小二乘法来求解以上问题, 即

$$D_{(k)} = \arg \min \|s - D\alpha_{(k)}\|_F^2 = s\alpha_{(k)}^T (\alpha_{(k)}\alpha_{(k)}^T)^{-1} \quad (13)$$

其中  $s$  为原始图像,  $D$  为稀疏字典,  $\alpha$  为稀疏矩阵。

MOD 算法描述如下:

初始化工作:

初始化字典: 建立  $D_0 \in R^{n \times m}$ 。

标准化: 标准化  $D_0$  的列。

稀疏编码阶段: 用 OMP 算法逼近结果, 即寻求式(14)的近似解  $\alpha_i$

$$\min \|\alpha\|_0 \quad st. \quad \|s - D\alpha\| \leq \epsilon \quad (14)$$

字典学习: 用下面公式更新字典

$$D_{(K)} = \arg \min \|s - D\alpha_{(K)}\|_F^2 = s\alpha_{(K)}^T (\alpha_{(K)}\alpha_{(K)}^T)^{-1} \quad (15)$$

停止规则:  $\|s - D\alpha_{(K)}\|_F^2$  值的大小满足迭代停止要求。

输出: 想要的结果  $D_{(K)}$ 。

### 2.3 DCT 过完备字典

本文选择 DCT 过完备字典作为稀疏表示的初始化字典, 是因为 DCT 字典对周期信号有着良好的分解能力<sup>[9]</sup>。DCT 字典由 DCT 变换获得, 给定序号  $x(n)$ ,  $n = 0, 1, \dots, N-1$ , 其离散余弦变换:

$$X_c(0) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \quad (16)$$

$$X_c(k) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cos \frac{(2n+1)k\pi}{2N} \quad (17)$$

如果写成矩阵则是

$$X_c = C_N x \quad (18)$$

其中  $C_N$  是  $N * N$  变换矩阵, 其行向量为余弦基。

对于 DCT 变换后所获得的完备字典, 采用分数频率法将其扩展成为过完备字典, 具体的做法是将得到的完备字典对其频率上做更加精细的遍历和抽样, 从而获得一个新的过完备字典。

## 3 基于稀疏表示的图像去噪框架

由式(4)可知, 图像在过完备字典上实现自适应稀疏分解, 其重构过程实质上是一个逼近过程。因此, 通过设定逼近误差  $\epsilon$ , 即可实现图像去噪。设  $\epsilon = k\sigma^2$ , 其中  $k$  取 1.05,  $\sigma$  为噪声标准差。最后通过以下两式实现整个图像的去噪<sup>[10]</sup>:

$$\hat{\alpha} = \arg \min \|\alpha\|_0 \quad st. \quad \|D\alpha - s\|_2 \leq k\sigma^2 \quad (19)$$

$$\hat{s} = D\hat{\alpha} \quad (20)$$

该方法在图像去噪上的效果还是十分明显的, 但是计算量十分惊人。为此, 本文将算法进行了小的改进, 将待处理噪声图像在稀疏分解前按  $8 \times 8$  的大小进行分块处理, 选取原始图像中所有的  $8 \times 8$  图像块。对于一张  $512 \times 512$  的图片而言, 考虑所有的重合部分的情况下该图像可以得到

$(512-7)^2=255025$  个图像块。分块的好处是稀疏字典的规模可以大大降低,算法的计算量获得了极大的改善。对于每一块图像块的去噪而言,都满足式(19),从而将去噪模型转化<sup>[1]</sup>为

$$\{\alpha_{ij}, \hat{X}\} = \arg \min_{\alpha_{ij}, \hat{X}} \|X - Y\|_2^2 + \sum_{i,j} u_{ij} \|\alpha_{ij}\|_0 + \sum_{i,j} \|Dx_{i,j} - R_{ij}X\|_2^2 \quad (21)$$

式(21)中,第一项为含噪图像  $Y$  与原始图像  $X$  之间的总体相似程度。第二项是稀疏性约束;第三项中的  $R_{ij}X$  表示第  $ij$  张子图图像,  $R_{ij}$  指用于提取子图的矩阵。  $ij$  为子图片的序列下标。

对于每一张子图,利用 OMP 算法求得所有子图的稀疏表示之后,再用所求的稀疏表示来更新  $X$ ,需求解式:(22)

$$\hat{X} = \arg \min_{\hat{X}} \|X - Y\|_2^2 + \sum_{i,j} \|Dx_{i,j} - R_{ij}X\|_2^2 \quad (22)$$

式(22)是一个二项式,求其近似解:

$$\hat{X} = (\lambda E + \sum_{i,j} R_{ij}^T R_{ij})^{-1} (\lambda Y + \sum_{i,j} R_{ij}^T D \hat{\alpha}_{ij}) \quad (23)$$

其中  $E$  为单位矩阵,  $\hat{X}$  为去噪后图像。

所得的去噪算法步骤为:1) 寻求每个子图像块的稀疏表示;2) 对重构的小图像块平均处理得到最后的去噪图像。

## 4 实验及结果

实验基于 PC 机平台(CPU 主频 2.7GHZ,内存 2GB),并用 Matlab 7 实现程序仿真。为了取得良好的实验结果,本文选择了叠加不同强度噪声的 lena 和 barbara 作为实验图像, lena 的轮廓信息都相对丰富,而 barbara 有着丰富的纹理信息。用 DCT 过完备字典作为初始化字典,将图像按  $8 \times 8$  大小进行分块处理,提取子图像块中的十分之一的图像块,然后用 OMP 算法对其进行稀疏分解,并用 MOD 算法对 DCT 过完备字典进行学习更新。本文采用冗余度为 4 的过完备 DCT 字典,字典的原子个数为 256,即字典的大小为  $16 \times 256$ 。最后采用第 3 节描述的去噪方法完成图像去噪。图 1(a)为 barbara 图像初始化的 DCT 字典,图 1(b)为其学习后得到的 MOD 字典。

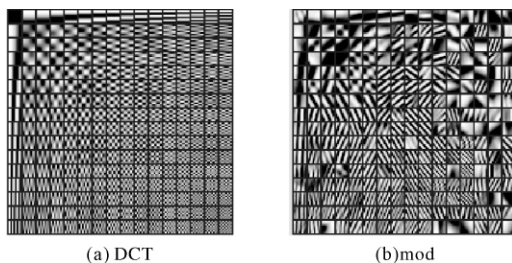


图 1 DCT 字典和 MOD 字典

本文分别运用小波去噪算法、DCT 固定基字典稀疏分解算法以及本文算法三种方法进行去噪实验,并将本文算法与前两种算法进行比较。本文以图像峰值信噪比 PSNR 作为性能分析的主要参数,比较各种去噪方法的 PSNR 值, PSNR 值取小数点后四位。图 2 和图 3 分别显示了各类方法对噪声标准差为 20 的 Lena 和 Barbara 图像去噪效果的

局部对比图。



图 2 Lena 去噪效果对比



图 3 Barbara 去噪效果对比

通过对实验结果图像的直观比较可以看出,基于 DCT 固定基和本文方法的稀疏表示类方法无论是 Lena 图像中帽檐等边缘特征还是 Barbara 图像中较为丰富的纹理信息上,去噪和图像还原效果均好于传统的小波去噪方法;此外, DCT 固定基方法由于其字典结构上的特殊性,对图像纹理部分的表示效果要优于轮廓和平滑部分,故在 Barbara 上的去噪表现要优于 Lena。与之相比,本文方法无论是从主观指标还是客观质量上都拥有更好的去噪效果,这是因为通过学习方法训练得到的字典来源图像本身,针对源图像而言具有更好的表示特性,可以克服 DCT 固定基方法在字典结构上的单一性。

表 1 显示了各种算法的 PSNR 值,以 Barbara 为例,比较各类方法与不同噪声强度图像的 PSNR 值可以看出,该方法比噪声标准差 20 情况下的小波去噪方法高出了 4.5904dB,比 DCT 固定基方法高出 0.8471dB,有着一定的优势。但也需要指出的是,稀疏表示去噪算法由于需要进行稀疏分解和字典学习,算法的复杂度较高,运算时间也会更长。

表 1 不用方法的 PSNR 值比较

图像	噪声标准差	PSNR			
		噪声图像	小波去噪	DCT	本文方法
Lena	10	28.1547	31.8427	35.3256	35.4944
	20	22.0766	28.5683	31.9831	32.3824
	40	15.5887	25.8117	28.5077	28.9644
Barbara	10	28.1309	29.8035	33.9821	34.4523
	20	22.1103	26.2094	29.9527	30.7998
	40	16.0996	23.1411	26.0248	26.9256

## 5 结语

本文运用了一种基于 DCT 过完备字典字典和 MOD 字典学习算法相结合的稀疏表示图像去噪算法,本文通过求解原始噪声图像的分块子图像的稀疏分解和对 DCT 过完备字典的学习更新,大大减少计算量,并且采用 MOD 字典学习算法克服了 DCT 过完备字典只针对纹理部分的特性,提高了去噪算法的综合性能。试验结果表明,该算法能够很好地去除图像中的噪声,并保留图像的细节信息,提高去噪图像的 PSNR 值,且具有很好的视觉效果。

### 参考文献

[1] M Elad, M Aharon. Image denoising via sparse and redundant

- representation over learned dictionaries[J]. IEEE Trans on Image Processing, 2006, 15(12): 3736-3745.
- [2] D L Donoho. Denoising by soft thresholding[J]. IEEE Trans on Information Theory, 1995, 41(3): 613-627.
- [3] J Portilla, V Strela. Image denoising using scale mixtures of Gaussians in the wavelet domain[J]. IEEE Trans on Image Processing, 2003, 12(11): 1338-1351.
- [4] MALLAT S, ZHANG Z. Matching pursuits with time-frequency dictionaries[J]. IEEE transactions on Signal Processing, 1993, 41(12): 3397-3415.
- [5] COIFMAN R, WICKERHAUSER M. Entropy based algorithms for best basis selection[J]. IEEE Transaction on Information Theory, 1992, 38(2): 713-718.
- [6] PATI Y C, REZAIIFAR R, KRISHAPRASAD P S. Orthogonal matching pursuit; recursive function approximation with applications to wavelet decomposition[C]// Proceedings of the 27th Annual Asilomar Conference on Signals, Systems, and Computers, 1993, 1: 40-44.
- [7] CHEN S, DONOHO D, SAUNDERS M. Atomic decomposition by basis pursuit[J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 1999, 20(1): 33-61.
- [8] Micheal Elad. Sparse and Redundant Representations [M]. Springer Science+Business Media, 2010: 227-258.
- [9] 刘艳, 李宏东. DCT 域图象处理和特征提取技术[J]. 中国图形图象学报, 2003, 8(2): 121-128.  
LIU Yan, LI Hong. D. Image and video pressing techniques in the DCT domain[J]. Journal of image and Graphics, 2003, 8(2): 121-128.
- [10] S. Lesage, R. Gribonval, F. Bimbot, L. Benaroya. Learning unions of orthonormal bases with thresholded singular value decomposition" [C] // IEEE Int. Conf. Acoust, Speech, Signal Process, 2005: 287-312.
- [11] O. G. Guleryuz. Nonlinear approximation based image recovery using adaptive sparse reconstructions and iterated denoising" [J]. IEEE Trans. mage Process, 2005, 15(3): 539-553.

(上接第 90 页)

for 循环运行次数为 144000+72000。修改算法之前的 for 循环运行次数则至少为: 72000×72000 次, 显然程序运行时间大大缩短。即用大的存储空间换取了更少的计算时间。

#### 4 结语

MatLab 是一种进行矩阵运算的科学计算软件。在实际的 MatLab 程序开发中, 要综合考虑时间和空间效率, 在处理海量数据时, 如果需要缩短数据处理时间, 则可以充分利用 MatLab 进行矩阵运算的高效率特性, 将 for 循环通过矩阵运算实现, 从而大大缩短数据处理时间。在构建矩阵时, 可以通过增加实际内存和分配虚拟内存, 采用经济实用的数值数据类型等方式, 达到创建大容量矩阵的目的, 最终通过牺牲内存空间以缩短数据处理时间, 从而实现空间换时间的目的。

#### 参考文献

- [1] <http://www.mathworks.com/support/product/product.html?product=SV>.
- [2] 陈怀琛. 数字信号处理教程[M]. 第 2 版. 北京: 电子工业出版社, 2008: 318-323.  
CHEN Huaichen. Digital Signal Processing Manual[M]. 2<sup>nd</sup> Edition[M]. Beijing: Electronic Industry Press, 2008: 318-323.
- [3] 陈杰. MATLAB[M]. 第 2 版. 北京: 电子工业出版社, 2010: 218-222.  
CHEN Jie. MATLAB[M]. 2<sup>nd</sup> Edition[M]. Beijing: Electronic Industry Press, 2010: 218-222.
- [4] [http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/?s\\_cid=global\\_nav](http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/?s_cid=global_nav).
- [5] 布莱恩特, 奥哈拉伦. 深入理解计算机系统[M]. 第 2 版. 龚奕利, 雷迎春译. 北京: 机械工业出版社, 2011: 608-612.  
Braentl, Aohalaren. Deeply in Computer System [M]. 2<sup>nd</sup>. GONG Yili, LEI Yingchun [M]. Beijing: Mechanism Industry Press, 2011: 608-612.
- [6] 敖莉, 于得水, 舒继武, 等. 一种海量数据分级存储系统 TH-TS [J]. 计算机研究与发展, 2011, 48(6): 1089-1111.  
AO Li, YU Deshui, SHU Jiwu, et al. A Tiered Storage System for Massive Data: TH-TS [J]. Journal of Computer Research and Development, 2011, 48(6): 1089-1111.
- [7] 张德山, 李海浩. 海量数据存储管理方法的研究[J]. 信息化研究, 2011, 37(4): 4-7.  
ZHANG Deshan, LI Haihao. The Safety Precautions of the Oracle Database's Password [J]. Informatization Research, 2011, 37(4): 4-7.
- [8] 张延松, 焦敏, 王占伟, 等. 海量数据分析的 One-Size-fits-all OLAP 技术[J]. 计算机学报, 2011, 34(10): 1936-1946.  
ZHANG Yansong, JIAO Min, WANG Zhanwei, et al. One-size-fits-all OLAP Technique for Big Data Analysis [J]. Chinese Journal of Computers, 2011, 34(10): 1936-1946.
- [9] 徐海云, 涂雄苓. 海量数据导入与导出 MatLab 的有效方法[J]. 数理统计与管理, 2007, 26(4): 649-655.  
XU Haiyun, TU Xionglin. Efficient Methods of Massive Data's Importing to and Export from MatLab [J]. Application of Statistics and Management, 2007, 26(4): 649-655.
- [10] 韩希先, 杨华东, 李建中. TKEP: 海量数据上一种有效的 Top-K 查询处理算法[J]. 计算机学报, 2010, 33(8): 1405-1417.  
HAN Xixian, YANG Huadong, LI Jianzhong. TKEP: An Efficient Top-K Query Processing Algorithm on Massive Data [J]. Chinese Journal of Computers, 2010, 33(8): 1405-1417.