

非支配排序遗传算法(NSGA) 算子分析

关志华

(天津工业大学管理学院, 天津 300160)

摘要: 介绍了一种基于遗传算法的多目标进化算法 - 非支配排序遗传算法 (NSGA)。并用 NSGA 对三个多目标优化问题进行了详尽的计算, 对采用不同的算子和不同的算子取值进行了对照, 初步得出了一组适用于不同类型问题的 NSGA 的遗传算子取值, 对其他同类问题的计算提供了参考。

关键词: 遗传算法; 非支配排序遗传算法; 遗传算子

中图分类号: TP18 **文献标识码:** A **文章编号:** 1004-6062(2004)01-0056-05

0 概述

Schaffer^[1]于 1984 年将遗传算法引入多目标优化领域, 自从 1990 年以来, 这一领域逐渐成为多目标优化技术的研究热点。遗传算法是一种群体搜索方法, 它可以在一个进化代中获得多个 Pareto 优化解。在 1993 年之后涌现了许多多目标遗传算法^[2~4], 在这些算法的基础上, 有许多具体的工程领域应用成功的实例^[5,6]和对原有算法的改进性工作^[7~9]。非支配排序遗传算法 (Nondominated Sorting Genetic Algorithm) - NSGA 是由 Srinivas and Deb^[10]于 1993 年提出的, 其基本思路是对所有的个体按不同的层次分级, 在执行选择算子之前, 种群已经根据支配与非支配关系进行了分级排序, 并且种群中的所有个体都被指定一个虚拟适应度值 (一般情况下和种群规模成一定比例), 同级个体的虚拟适应度值相同, 这样就保证了同级个体有同样的复制概率。为了维持种群多样性, 这些分级后的个体共享它们的虚拟适应度值。NSGA 的特点在于将多个目标函数计算转化为虚拟适应度计算。NSGA 可以处理多个目标函数的优化问题^[11], 并且可以处理最大化或最小化问题。有关 NSGA 的应用在很多文献中都可以见到^[12~14]。在文献[12]中, 讨论了 NSGA 对共享半径选择的敏感性, 文献[13,14]都是应用 NSGA 进行实际问题优化的文章。本文首先给出多目标优化问题的一般描述和非支配排序遗传算法的算法流程, 然后通过三个测试函数对 NSGA 的不同算子和算子的不同取值进行了详尽的分析, 得出了一组具有指导意义的参数取值。

1 非支配排序遗传算法

NSGA 是基于对个体的几层分级实现的。在选择执行前, 群体根据支配与非支配关系来排序: 所有非支配个体被

排成一类, 这些被分级的个体共享它们的虚拟适应度值。然后, 忽略这组已分级的个体, 对种群中的其它个体按照支配与非支配关系再进行分级, 该过程继续直到群体中的所有个体被分级。在 NSGA 中对每个局部的 Pareto 曲面(线)上的所有个体分别采用适应度共享策略, 有利于保持群体多样性, 可以克服超级个体的过度繁殖, 防止早熟收敛。算法流程如图 1 所示。算法根据适应度共享来对虚拟适应度值重新指定, 比如, 指定 Front = 1 的个体虚拟适应度值为 1, Front = 2 的个体虚拟适应度值相应减少, 可以取为 0.8, 依此类推。这样, 可使虚拟适应度值规范化, 并且优良个体的适应度值保持优势, 可以有更多的复制机会, 同时也维持了种群的多样性。由于采用了适应度共享, 对于在共享半径 r_{share} 内的个体其适应度相应减少为 $f(x) = \frac{f(x)}{\sum_p s(d(x,y))}$ 。其中, x, y —个体; $f(x)$ —个体 x 共享后的适应度值; $f(x)$ —个体 x 共享前的适应度值; s —共享函数; d —距离函数; p —种群; 为常数^[16]。

2 NSGA 实验测试问题

$$\begin{cases} \text{问题 1:} & \begin{cases} \min f_1(x) = x^2 \\ \min f_2(x) = (2-x)^2 \end{cases} & x \in [0, 10] \\ \text{问题 2:} & \begin{cases} \min f_1(x) = \begin{cases} -x & x \leq 1 \\ x-2 & 1 < x \leq 3 \\ -x+4 & 3 < x \leq 4 \\ x-4 & x > 4 \end{cases} \\ \min f_2(x) = (x-5)^2 \end{cases} & x \in [0, 10] \\ & \begin{cases} \min f_1(x_1, x_2) = (x_1-2)^2 + (x_2-1)^2 + 2 \\ \min f_2(x_1, x_2) = 9x_1 - (x_2-1)^2 \end{cases} \end{cases}$$

收稿日期: 2001-09-17 修回日期: 2002-10-28

作者简介: 关志华(1971—), 男, 湖南湘乡人, 博士研究生, 主要研究方向为多目标进化算法及其应用。

$$\text{问题 3: } s. t. \begin{cases} g_1 = - (x_1^2 + x_2^2 - 255) & x_1 \in [-15, 15] \\ g_2 = - (x_1 - 3x_2 + 10) & x_2 \in [-15, 15] \end{cases}$$

以得到比二进制编码好的结果。实数编码的最佳适应度值和平均适应度值都要好于二进制编码,它所得出的 Pareto 曲

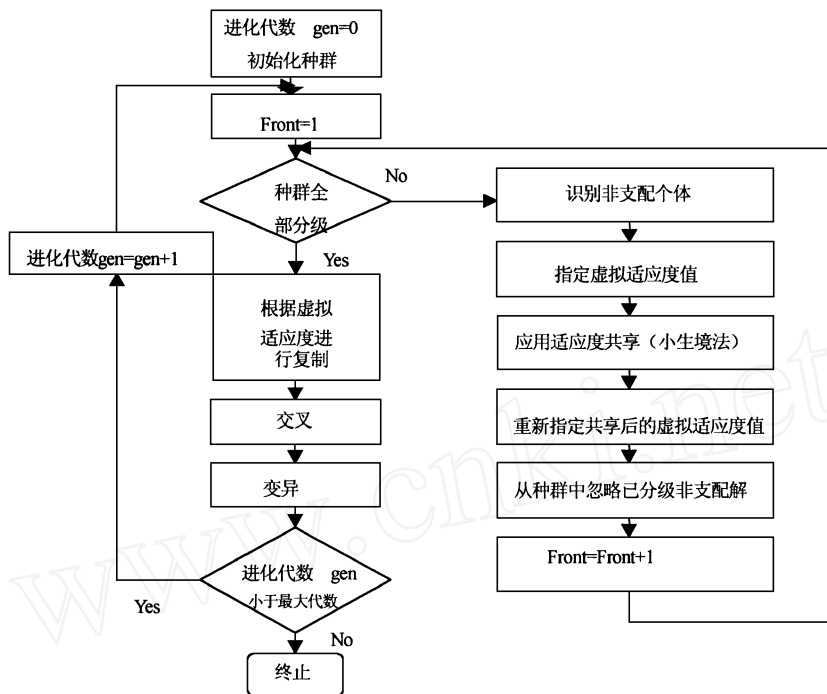


图1 NSGA 算法流程图

问题 1 是同时优化两个简单的非线性、连续的函数,问题 2 中有一个目标函数是线性分段连续的,另一个目标函数是连续、非线性的,问题 1 和 2 都只有一个决策变量。问题 3 的两个目标函数都是二维、非线性的,并且有一个非线性约束和一个线性约束。

3 实验测试问题结果

3.1 采用实数编码和二进制编码方式的比较分析

采用二进制编码的参数选择为:种群规模为 100,染色体长度为 40,最大进化代数为 100,采用单点交叉,交叉概率为 0.8,均匀变异,变异概率为 0.01,适应度空间共享,共享半径为 0.05(问题 3 为 0.158)。

采用实数编码的参数选择为:种群规模为 100,最大进化代数为 100,采用单点交叉,交叉概率为 0.8,均匀变异,变异概率为 0.01,适应度空间共享,共享半径为 0.05(问题 3 为 0.158)。结果如表 1 所示。

表 1 采用二进制编码和实数编码的结果

		问题 1	问题 2	问题 3		
二进制编码	目标函数 1	平均适应度值	3.680	0.158	129567.102	
		最佳适应度值	0.000	- 0.952	21.438	
	目标函数 2	平均适应度值	2.249	5.027	129373.531	
		最佳适应度值	0.000	0.000	- 207.241	
	实数编码	目标函数 1	平均适应度值	1.426	- 0.140	80.566
			最佳适应度值	0.000	- 0.983	18.650
目标函数 2		平均适应度值	1.340	8.190	- 80.679	
		最佳适应度值	0.001	0.000	- 201.620	

从上表中可以看出,实数编码在三个问题的计算中都可

线也很好地反映了这一点:对三个问题实数编码的 Pareto 曲线均是凸的,而且分布很均匀。所以在 NSGA 中我们推荐采用实数编码方式。后续的真实问题均采用实数编码方式。

3.2 采用单点交叉和均匀交叉算子的比较分析

采用单点交叉的参数选择为:实数编码,种群规模为 100,最大进化代数为 100,交叉概率为 0.8,均匀变异,变异概率为 0.01,适应度空间共享,共享半径为 0.05(问题 3 共享半径为 0.158)。

采用均匀交叉方法的参数选择为:实数编码,种群规模为 100,最大进化代数为 100,交叉概率为 0.8,均匀变异,变异概率为 0.01,适应度空间共享,共享半径为 0.05(问题 3 为 0.158)。结果如表 2 所示。

表 2 采用单点交叉和均匀交叉的结果

		问题 1	问题 2	问题 3	
单点交叉	目标函数 1	平均适应度值	1.426	- 0.140	80.566
		最佳适应度值	0.000	- 0.983	18.650
均匀交叉	目标函数 2	平均适应度值	1.340	8.190	- 80.679
		最佳适应度值	0.001	0.000	- 201.620
均匀交叉	目标函数 1	平均适应度值	1.566	- 0.195	96.375
		最佳适应度值	0.001	- 0.971	20.842
	目标函数 2	平均适应度值	1.105	8.794	- 96.046
		最佳适应度值	0.000	0.005	- 205.364

从表 2 中可以看出,在三个问题的计算中单点交叉和均匀交叉都可以得到比较好的结果。对三个问题单点交叉和均匀交叉的 Pareto 曲线均是凸的,而且分布很均匀(只有问

题2有个别点例外)。对两个目标函数分别来说,单点交叉和均匀交叉所求得的最佳适应值和平均适应值基本上相等。由均匀交叉获得的各个目标函数的适应值在本质上没有比单点交叉所得的值有明显改进,这说明对于我们所选的参数来说,NSGA对交叉算子并不敏感,但是对于问题2来说,采用单点交叉的结果要优于采用均匀交叉的结果。

3.3 采用不同的交叉概率的比较分析

采用单点交叉的参数选择为:实数编码,种群规模为100,最大进化代数100,交叉概率从0.6~1.0,均匀变异,变异概率为0.01,适应度空间共享,共享半径为0.05(问题3共享半径为0.158)。

采用均匀交叉方法的参数选择为:实数编码,种群规模为100,最大进化代数100,交叉概率从0.6~1.0,均匀变异,变异概率为0.01,适应度空间共享,共享半径为0.05(问题3为0.158)。结果如表3所示。

对于单点交叉,从结果中我们可以看出,交叉概率为0.6时,对于问题1来说效果还不错,但是对于问题2和问题3来说Pareto曲线出现了明显的间断、不平滑现象。对于交叉概率为0.7时,问题1、2、3都有明显的间断出现。对于交叉概率为0.8时问题1、2、3基本上没有明显的间断,在整个区间上分布比较均匀。对于交叉概率为0.9~1.0时,由于交叉概率的增大使结果集出现了不稳定现象,问题1、2、3都有明显的间断出现。从最佳适应度值和平均适应度值中我们可以看出,对于三个问题五种交叉概率选择,它们的区别不是很大,对一个目标函数的改进,总是建立在对另一个目标函数的损害的基础上。但是,如果两个目标函数的重要性不一样的话,我们可以利用这一特点对其进行分别处理。由以上分析可以看出交叉概率在单点交叉情况下,不宜采用太大的交叉概率。我们推荐取为0.8。

对于均匀交叉,从结果中我们可以看出均匀交叉的结果在这三个问题代表的问题上,并没有多明显的改进效果。从交叉概率0.6~1.0三个问题的Pareto曲线都有不光滑的间断点出现。从Pareto曲线中的孤立点或间断可以说明在结果集中有非支配个体出现,尤其是对于问题2、3当交叉概率增大时,现象更加明显。所以,如果采用均匀交叉算子,对问题1、3类型,我们推荐交叉概率选为0.8;对问题2类型,我们推荐交叉概率选为0.6。

3.4 采用不同的适应度共享方法的比较分析

采用变量空间共享的参数选择为:实数编码,种群规模为100,最大进化代数100,均匀交叉,交叉概率从0.8,均匀变异,变异概率为0.01,变量空间共享,共享半径为0.05(问题3共享半径为0.158)。

采用目标函数空间共享方法的参数选择为:实数编码,种群规模为100,最大进化代数100,均匀交叉,交叉概率从0.8,均匀变异,变异概率为0.01,目标函数共享,共享半径为0.05(问题3为0.158)。结果如表4所示。

表3 采用单点交叉的不同交叉概率的结果

			问题1	问题2	问题3
单点交叉	目标函数1	平均适应度值	1.437	-0.271	85.725
		最佳适应度值	0.000	-0.987	21.484
交叉概率0.6	目标函数2	平均适应度值	1.243	9.592	-80.178
		最佳适应度值	0.000	0.001	-191.604
单点交叉	目标函数1	平均适应度值	1.569	-0.009	87.175
		最佳适应度值	0.001	-0.995	26.859
交叉概率0.7	目标函数2	平均适应度值	1.093	6.822	-87.312
		最佳适应度值	0.004	0.001	-182.525
单点交叉	目标函数1	平均适应度值	1.426	-0.140	80.566
		最佳适应度值	0.000	-0.983	18.650
交叉概率0.8	目标函数2	平均适应度值	1.340	8.190	-80.679
		最佳适应度值	0.001	0.000	-201.620
单点交叉	目标函数1	平均适应度值	1.605	-0.178	79.696
		最佳适应度值	0.000	-0.977	25.690
交叉概率0.9	目标函数2	平均适应度值	1.155	8.648	-79.812
		最佳适应度值	0.007	0.006	-203.479
单点交叉	目标函数1	平均适应度值	1.471	-0.211	77.580
		最佳适应度值	0.000	-0.993	23.117
交叉概率1.0	目标函数2	平均适应度值	1.228	8.799	-77.587
		最佳适应度值	0.001	0.003	-129.892
均匀交叉	目标函数1	平均适应度值	1.420	-0.265	98.738
		最佳适应度值	0.001	-0.989	10.627
交叉概率0.6	目标函数2	平均适应度值	1.217	9.661	-98.455
		最佳适应度值	0.000	0.001	-214.287
均匀交叉	目标函数1	平均适应度值	1.500	-0.154	87.583
		最佳适应度值	0.001	-0.937	16.949
交叉概率0.7	目标函数2	平均适应度值	1.155	8.211	-62.531
		最佳适应度值	0.010	0.006	-205.518
均匀交叉	目标函数1	平均适应度值	1.566	-0.195	96.375
		最佳适应度值	0.001	-0.971	20.842
交叉概率0.8	目标函数2	平均适应度值	1.105	8.794	-96.046
		最佳适应度值	0.000	0.005	-205.364
均匀交叉	目标函数1	平均适应度值	1.560	-0.103	87.874
		最佳适应度值	0.001	-0.982	22.172
交叉概率0.9	目标函数2	平均适应度值	1.121	7.638	-87.928
		最佳适应度值	0.007	0.004	-211.302
均匀交叉	目标函数1	平均适应度值	1.313	-0.294	102.814
		最佳适应度值	0.000	-0.984	13.577
交叉概率1.0	目标函数2	平均适应度值	1.313	10.183	-81.130
		最佳适应度值	0.000	0.003	-207.598

表4 采用不同的适应度共享方法的结果

		问题1	问题2	问题3	
目标函数空间共享	目标函数1	平均适应度值	1.566	-0.195	96.375
		最佳适应度值	0.001	-0.971	20.842
	目标函数2	平均适应度值	1.105	8.794	-96.046
		最佳适应度值	0.000	0.005	-205.364
变量空间共享	目标函数1	平均适应度值	1.286	-0.019	92.905
		最佳适应度值	0.000	-0.985	16.380
	目标函数2	平均适应度值	1.400	6.629	-92.829
		最佳适应度值	0.002	0.002	-212.806

通过对表4数据进行分析,我们可以看出,对于问题1,由于问题本身比较简单:两个目标函数均为一维、单峰的函数,它们本身的性状就比较简单。所以,对这一类问题来说,采用目标函数空间或是变量空间共享并没有太大的区别,均能得出比较好的解集。对于问题2目标函数空间共享所得的 Pareto 曲线不如采用变量空间共享所得解集的效果好。对于问题3无论是最佳适应度值、平均适应度值,还是结果集的 Pareto 曲线的性状,变量空间共享均好于目标函数空间共享。由于问题较少,我们不能在此定论:对复杂、多维、多峰的多目标优化问题,变量空间共享要好于目标函数空间共享。所以,我们只作此假设,还有待于后续工作的进一步证实。

3.5 采用均匀变异的不同变异概率的分析比较

采用均匀变异的参数选择为:实数编码,种群规模为100,最大进化代数100,均匀交叉,交叉概率为0.8,均匀变异,变异概率为0.00~0.20,适应度空间共享,共享半径为0.05(问题3为0.158)。结果如表5所示。

对于均匀变异,从结果中我们可以看出,变异概率为0.0时,对于问题1来说效果还不错,但是对于问题2和问题3来说 Pareto 曲线出现了明显的间断、不平滑现象。对于变异概率为0.02时,问题2、3都有明显的间断出现。当变异概率为0.04时,问题2、3都存在不连续现象,也就是说在结果集中存在非支配解。当变异概率逐渐增大时,从0.06到0.20,三个问题的 Pareto 曲线都不同程度的出现了间断点,可以看出,当变异概率加大时,结果群体出现了不稳定的现象,而且结果集中包含的非支配个体个数也逐渐增多。从最佳适应度值和平均适应度值中我们可以看出,对于三个问题六种变异概率选择,除了个别的离散点较多的解集,其余的解集的区别不是很大,对一个目标函数的改进,总是建立在对另一个目标函数的损害的基础上。

从分析结果中,我们可以得出:对于连续的多目标函数的优化,变异概率的选择有较大的余地,即可以在一个较宽的范围内进行选择,但是,变异概率也不宜选得太大,当变异概率超过0.04时,从问题1可以看出 Pareto 曲线出现了明显的不光滑区域,我们推荐选在0.00~0.02之间较好。对于分段连续的函数来数,变异概率也不可以选得太大,可以看出,一般也是选在0.00~0.02之间较好。问题3的类型是多维、

单峰的函数优化,从图形中可以看出,它对变异概率的选择比较敏感,变异概率太大会使得到的 Pareto 曲线没有任何意义,总结我们所得到的结果,可以看出,变异概率也不宜过小,一般取在小于0.04即可。从我们的问题可以看出,越是多维、多峰的函数优化其变异概率就要比单维、简单的函数优化要取得大,很明显,只有较大的变异概率才能保证进化过程跳出局部最优解,最终收敛到全局最优解。虽然对多目标优化没有全局最优解可言。但是,大的变异概率也可以保证对整个空间的充分探索和开发。

表5 采用均匀变异的不同变异概率的结果

		问题1	问题2	问题3	
均匀变异概率0.00	目标函数1	平均适应度值	1.668	-0.244	72.561
		最佳适应度值	0.000	-0.977	22.491
	目标函数2	平均适应度值	1.063	8.976	-67.549
		最佳适应度值	0.000	0.042	-209.711
均匀变异概率0.02	目标函数1	平均适应度值	1.225	-0.111	329.482
		最佳适应度值	0.000	-0.994	18.876
	目标函数2	平均适应度值	13474	7.797	107.772
		最佳适应度值	0.000	0.000	-212.348
均匀变异概率0.04	目标函数1	平均适应度值	1.031	-0.186	110.603
		最佳适应度值	0.001	-0.981	23.585
	目标函数2	平均适应度值	1.778	8.952	-110.250
		最佳适应度值	0.000	0.004	-211.761
均匀变异概率0.06	目标函数1	平均适应度值	1.302	-0.294	103.567
		最佳适应度值	0.000	-0.935	13.573
	目标函数2	平均适应度值	1.491	9.990	-74.195
		最佳适应度值	0.000	0.000	-208.645
均匀变异概率0.08	目标函数1	平均适应度值	0.996	-0.119	86.750
		最佳适应度值	0.000	-0.999	20.258
	目标函数2	平均适应度值	1.775	7.747	-86.412
		最佳适应度值	0.000	0.002	-213.298
均匀变异概率0.10	目标函数1	平均适应度值	0.990	-0.056	638.158
		最佳适应度值	0.000	-0.999	15.969
	目标函数2	平均适应度值	1.948	7.279	417.345
		最佳适应度值	0.001	0.000	-210.544

4 结论

本文选取了三个典型的问题分别代表了三种不同类型的函数优化问题:简单的连续函数问题、分段连续问题、多维带约束问题。通过对三个问题进行五种分类实验:不同的编码方式、不同的交叉算子、不同的交叉概率、不同的变异概率、不同的适应度共享方式进行详尽的实算结果的分析,我们对 NSGA 算法进行了详细的分析,得出了一些指导性的结果。提出了针对三种不同类型的函数采用 NSGA 进行优化时,不同算子的选择范围。由于我们在函数选取、问题试算

中采取的手段有限,所以得出的结论是否具有通用性还有待于进一步验证,对本文中提出的一些假设性结论,还有待于我们进一步加以验证。

参 考 文 献

- [1] J. D. Schaffer. Some experiments in machine learning using vector evaluated genetic algorithms: [Doctoral Dissertation]. Nashville TN: Vanderbilt University, 1984.
- [2] D. E. Goldberg. Genetic algorithms for search, optimization, and machine learning [M]. Reading Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, 1989.
- [3] C. M. Fonseca, P. J. Fleming. Genetic algorithms for multiobjective optimization: Formulation, discussion and generalization [A]. Proceedings of the Fifth International Conference on Genetic Algorithms [C]. San Mateo California: University of Illinois at Urbana-Champaign, Morgan Kaufmann Publishers, 1993, 416 ~ 423.
- [4] J. Horn, N. Nafpliotis, D. E. Goldberg. A niched Pareto genetic algorithm for multiobjective optimization [A]. In: Proceedings of the First IEEE Conference on Evolutionary Computation, IEEE World Congress on Computational Intelligence [C]. Piscataway New Jersey: IEEE Service Center, 1994. vol. 1, 82 ~ 87.
- [5] A. G. Cunha, P. Oliveira, J. A. Covas. (1997). Use of genetic algorithms in multicriteria optimization to solve industrial problems [A]. In: Thomas Bäck. Proceedings of the Seventh International Conference on Genetic Algorithms [C]. San Mateo California: Michigan State University, Morgan Kaufmann Publishers, 1997, 682 ~ 688.
- [6] K. Mitra, K. Deb, S. K. Gupta. Multiobjective dynamic optimization of an industrial Nylon 6 semibatch reactor using genetic algorithms [J]. Journal of Applied Polymer Science, 1998, 69(1): 69 ~ 87.
- [7] C. M. Fonseca, P. J. Fleming. Multiobjective optimization and multiple constraint handling with evolutionary algorithms—Part : Application example [J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics—Part A: Systems and Humans, 1998, 28(1): 38 ~ 47.
- [8] E. Zitzler, L. Thiele. Multiobjective optimization using evolutionary algorithms—A comparative case study [A]. In: A. E. Eiben. Parallel Problem Solving from Nature V [C]. Amsterdam: Springer-Verlag, 1998, 292 ~ 301.
- [9] D. A. Van Veldhuizen, G. B. Lamont. Evolutionary Computation and Convergence to a Pareto Front [A]. In: J. R. Koza. Late Breaking Papers at the Genetic Programming 1998 Conference [C]. Stanford University California: Stanford University Bookstore, 1998, 221 ~ 228.
- [10] N. Srinivas, K. Deb. Multiobjective optimization using nondominated sorting in genetic algorithms [R]. Technical report, Department of Mechanical Engineering, Indian Institute of Technology, Kanpur, India, 1993.
- [11] N. Srinivas, and Deb, K. 1994. Multiobjective Optimization Using Nondominated Sorting in Genetic Algorithms [J]. Evolutionary Computation, 1994, 2(3): 221 ~ 248.
- [12] C. A. C. Coello. An Empirical Study of Evolutionary Techniques for Multi Optimization in Engineering Design: [Doctoral Dissertation]. New Orleans LA: Tulane University, Department of Computer Science, 1996.
- [13] E. Michielssen, J. M. Sajer, S. Ranjithan et al. Design of Lightweight, BroadBand Microwave Absorbers Using Genetic Algorithms [J]. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 1993, 41(6/7): 1024 ~ 1031.
- [14] G. Vedarajan, L. C. Chan, D. E. Goldberg. Investment Portfolio Optimization using Genetic Algorithms [A]. In: J. R. Koza. Late Breaking Papers at the Genetic Programming 1997 Conference [C]. Stanford University California: Stanford University Bookstore, 1997, 255 ~ 263.
- [15] C. M. Fonseca, P. J. Fleming. An overview of evolutionary algorithms in multiobjective optimization [J]. Evolutionary Computation, 1995, 3(1): 1 ~ 16.
- [16] C. A. C. Coello. An Updated Survey of GA-Based Multiobjective Optimization Techniques [J]. ACM Computing Surveys, 2000, 32(2): 109 ~ 143.

Operators Analysing of the Nondominated Sorting Genetic Algorithm (NSGA)

GUAN Zhi-hua

(Management School of Tianjin Polytechnic University, Tianjin 300160, China)

Abstract: This paper introduced a multi-objective evolutionary algorithm which is based on genetic algorithm—Nondominated Sorting Genetic Algorithm (NSGA). By using it on three multi-objective problems with different operators and different operator parameters in detail and by comparing the results, a set of operator parameters to some different problems were given, which can be used as references in calculating the similar problems.

Key words: genetic algorithm; nondominated sorting genetic algorithm; genetic operators

责任编辑: 许冠南