

第四章 微粒群算法的行为分析

4.1 基于离散时间线性系统理论的分析

设 $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})$ 表示第 i 个微粒的位置, $p_i = (p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{in})$ 表示它所经历的最好位置(即具有最好的适应值), $p_g = (p_{g1}, p_{g2}, \dots, p_{gn})$ 表示群体中所有微粒经历过的最好位置。 $v_i = (v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{in})$ 表示微粒 i 的飞行速度。则对于每一代 t , 其第 d 维($1 \leq d \leq n$) 根据下列方程变化:

$$v_{id}(t+1) = \omega v_{id}(t) + c_1 \text{rand}() (p_{id} - x_{id}(t)) + c_2 \text{Rand}() (p_{gd} - x_{id}(t)) \quad (4.1)$$

$$x_{id}(t+1) = x_{id}(t) + v_{id}(t+1) \quad (4.2)$$

其中: ω 为惯性权重 (inertia weight), c_1, c_2 为加速常数 (acceleration constants), $\text{rand}()$ 、 $\text{Rand}()$ 为两个在 $[0, 1]$ 范围内均匀分布的随机函数。

对于标准 PSO 算法的进化方程 (4.1) (4.2), 不失一般性, 假设为一维优化问题, 这样就可以在 (4.1) 与 (4.2) 式中去掉下标 d 。

$$v_i(t+1) = \omega v_i(t) + c_1 r_1 (p_i(t) - x_i(t)) + c_2 r_2 (p_g(t) - x_i(t)) \quad (4.3)$$

$$x_i(t+1) = x_i(t) + v_i(t+1) \quad (4.4)$$

其中 $r_1, r_2 \in (0, 1)$ 为均匀分布的随机数, 定义 $\varphi_1 = c_1 r_1$, $\varphi_2 = c_2 r_2$, $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ 并对上式进行整理可得,

$$v_i(t+1) = \omega v_i(t) - \varphi x_i(t) + \varphi_1 p_i(t) + \varphi_2 p_g(t) \quad (4.5)$$

$$x_i(t+1) = \omega v_i(t) + (1 - \varphi) x_i(t) + \varphi_1 p_i(t) + \varphi_2 p_g(t) \quad (4.6)$$

即

$$\begin{bmatrix} v_i(t+1) \\ x_i(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega & -\varphi \\ \omega & 1-\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i(t) \\ x_i(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1 & \varphi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_i(t) \\ p_g(t) \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} v_i(t) \\ x_i(t) \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} p_i(t) \\ p_g(t) \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

上式即为标准的离散时间线性系统方程。为了分析方便, 假设 ω, φ 为常数, 也就是说标准 PSO 算法为线性定常离散系统, 其状态运动的表达式为:

$$\begin{bmatrix} v_i(t) \\ x_i(t) \end{bmatrix} = G^t \begin{bmatrix} v_i(0) \\ x_i(0) \end{bmatrix} + \sum_{j=0}^{t-1} G^{t-j-1} B \begin{bmatrix} p_i \\ p_g \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

$$p_i(t) = \begin{cases} p_i(t-1) & f(x_i(t)) \geq f(p_i(t-1)) \\ x_i(t) & f(x_i(t)) < f(p_i(t-1)) \end{cases} \quad (4.9)$$

$$p_g(t) = \arg \min \{f(p_0(t)), f(p_0(t)), f(p_1(t)), \dots, f(p_m(t)),\} \quad (4.10)$$

若 ω, φ 在迭代过程中自适应变化, 或者由于 $\varphi = c_1 r_1 + c_2 r_2$, 而 r_1, r_2 本身属于随机变量, 也就是说 φ 随着迭代在 $(0, c_1+c_2)$ 区间内随机变化。这时, $G=G(t)$ 属于时变矩阵, 则

$$\begin{bmatrix} v_i(t) \\ x_i(t) \end{bmatrix} = \Phi(t,0) \begin{bmatrix} v_i(0) \\ x_i(0) \end{bmatrix} + \sum_{i=0}^{t-1} \Phi(t,i+1) B \begin{bmatrix} p_i(t) \\ p_g(t) \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

其中 $\Phi(t, i)$ 是系统的状态转移矩阵, 即

$$\Phi(t+1, i) = G(t) \Phi(t, i) \quad (4.12)$$

显然有:

$$\Phi(t, 0) = G(t-1)G(t-2)\cdots G(0) \quad (4.13)$$

对于(4.7)式描述的离散时间系统, 如果 ω, φ 为常数, 则系统稳定(即 $t \rightarrow \infty$ 时, $v_i(t), x_i(t)$ 趋于某一定值)的充分必要条件是, G 的全部特征值 λ_1, λ_2 的幅值均小于 1。

由于 $G = \begin{bmatrix} \omega & -\varphi \\ \omega & 1-\varphi \end{bmatrix}$, 其特征值:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1+\omega-\varphi \pm \sqrt{(\varphi-\omega-1)^2 - 4\omega}}{2} \quad (4.14)$$

对于(4.14)式, 作如下讨论:

1) 当 $|\varphi - \omega - 1| > 2$ 时, 其特征值为两个实根, 其幅值小于 1 意味着:

$$-2 < 1 + \omega - \varphi + \sqrt{(\varphi - \omega - 1)^2 - 4\omega} < 2 \quad (4.15)$$

$$-2 < 1 + \omega - \varphi - \sqrt{(\varphi - \omega - 1)^2 - 4\omega} < 2 \quad (4.16)$$

两式相加得,

$$-2 < 1 + \omega - \varphi < 2 \quad (4.17)$$

与条件 $|\varphi - \omega - 1| > 2$ 相反, 因而当 $|\varphi - \omega - 1| > 2$ 时, 系统不稳定。

2) 当 $|\varphi - \omega - 1| < 2$ 时, 其特征值为两个复根, 其幅值为:

$$A = \frac{\sqrt{(1+\omega-\varphi)^2 + (\varphi-\omega-1)^2 - 4\omega}}{2} = \frac{\sqrt{2(1+\omega-\varphi)^2 - 4\omega}}{2} \quad (4.18)$$

根据系统稳定的条件 $A < 1$, 则:

$$\sqrt{2(1+\omega-\varphi)^2 - 4\omega} < 2 \quad (4.19)$$

$$(1+\omega-\varphi)^2 - 2\omega < 2 \quad (4.20)$$

$$(1+\omega-\varphi)^2 < 2(1+\omega) \quad (4.21)$$

$$1+\omega-\sqrt{2+2\omega} < \varphi < 1+\omega+\sqrt{2+2\omega} \quad (4.22)$$

即当 ω, φ 同时满足 $|\varphi - \omega - 1| < 2$ 和式(4.22)时, 系统稳定。

即:

$$\omega - 1 < \varphi < 3 + \omega \quad (4.23)$$

$$1 + \omega - \sqrt{2 + 2\omega} < \varphi < 1 + \omega + \sqrt{2 + 2\omega} \quad (4.24)$$

同时考虑到 ω, φ 均要求大于零, 则

$$\text{当 } 0 < \omega < 1 \text{ 时, } 0 < \varphi < 1 + \omega + \sqrt{2 + 2\omega} \quad (4.25)$$

$$1 \leq \omega \leq 2 \text{ 时, } \omega - 1 < \varphi < 3 + \omega \quad (4.26)$$

图 1 中, 由 OABCDE 所包围的阴影部分, 即为满足上式的 ω, φ 的取值区域, 即 ω, φ 在该区域内, 系统稳定。

3) 当 $|\varphi - \omega - 1| = 2$ 时, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, 则系统处于临界稳定状态。

从上述讨论可以看出, 当 $|\varphi - \omega - 1| < 2$ 时, 即 $-3 < \omega - \varphi < 1$, 且满足 (4.22) 式时, (4.7) 式描述的系统是渐近稳定的, 也就是说, PSO 算法收敛。而由 (4.8) 式, 在 G 的特征根幅值均小于 1 时:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} v_i(t) \\ x_i(t) \end{bmatrix} &= \lim_{t \rightarrow \infty} G^t \begin{bmatrix} v_i(0) \\ x_i(0) \end{bmatrix} + \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{t-1} G^{t-j-1} B \begin{bmatrix} p_i \\ p_g \end{bmatrix} \\ &= (I - G)^{-1} B \begin{bmatrix} p_i \\ p_g \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ h/\varphi & 1-h/\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 & -\varphi_2 \\ \varphi_1 & \varphi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_i \\ p_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \varphi_1 p_i + \varphi_2 p_g / \varphi \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

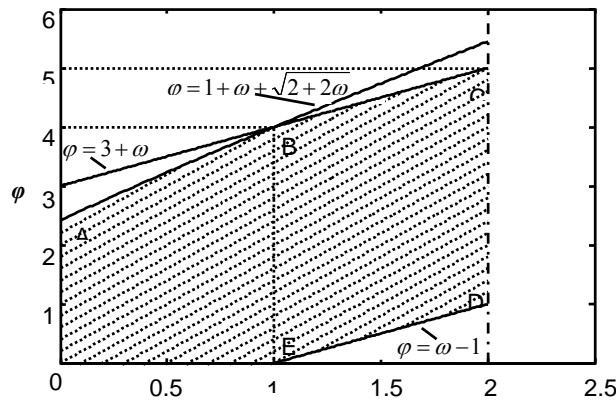


图 4.1 ω, φ 的取值区域

也就是说, 在 p_i, p_g 固定不变时, $t \rightarrow \infty$, $v_i(t) \rightarrow 0$, $x_i(t) \rightarrow \frac{\varphi_1 p_i + \varphi_2 p_g}{\varphi}$ 为 p_i 与 p_g 连线上的某一点, 而由于 (4.1) 和 (4.9) 式, p_i 将趋于 p_g , 因此, 在 p_g 固定的情况下, PSO 算法在满足上述条件时, 保证 $x_i(t) \rightarrow p_g$.

假设 ω, φ 为时变函数, 即 ω, φ 的值在迭代过程中随 t 而变化, 则 (4.4) 表示的为线性时变离散系统, 即:

$$\begin{bmatrix} v_i(t+1) \\ x_i(t+1) \end{bmatrix} = G(t) \begin{bmatrix} v_i(t) \\ x_i(t) \end{bmatrix} + B(t) \begin{bmatrix} p_i \\ p_g \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

考察其齐次系统, 根据离散时变系统的渐近稳定判别: 如果存在一个对于 $y(t)$ 的标量函数 $v(y(t))$, 且对任意 $y(t)$ 满足:

- i). $v(y(t))$ 为正定;
- ii). $\Delta v(y(t)) = v(y(t+1)) - v(y(t))$ 为负定;
- iii). $\|y(t)\| \rightarrow \infty$ 时, $v(y(t)) \rightarrow \infty$.

则系统在原点平衡状态 $y=0$ 为大范围渐近稳定。

设 $y(t) = \begin{bmatrix} v_i(t) \\ x_i(t) \end{bmatrix}$ ，定义一标量函数 $v(y(t)) = \|y(t)\|$ ，则

i). $v(y(t)) \geq 0$ 正定；

ii). $\Delta v(y(t)) = v(y(t+1)) - v(y(t)) = \|y(t+1)\| - \|y(t)\| \leq \|G(t)\| \|y(t)\| - \|y(t)\| = (\|G(t)\| - 1) \|y(t)\|$ ，只

要 ω 、 φ 满足 (4.12) 式， $G(t)$ 的特征根的幅值均小于 1，因而 $v(y(t))$ 负定；

iii). $\|y(t)\| \rightarrow \infty$ 时，显然有 $v(y(t)) \rightarrow \infty$ ，所以，即使 ω 、 φ 为时变函数，只要满足 (4.12) 式，即可保证 PSO 算法渐近收敛。

根据以上讨论，在满足一定的条件下，PSO 算法具有渐近收敛特性，而 $\varphi = c_1 r_1 + c_2 r_2$ ， r_1 、 r_2 (0,1) 为均匀分布的随机数，所以 φ (0, $c_1 + c_2$)，但上述参数选择只能保证 PSO 算法的渐近收敛性，至于是否收敛于局部最优或全局最优则没有保证。另外，在上述分析中，均假设 P_g 不变，但在实际 PSO 算法中正是因为 P_g 的不断进化保证了全局最优化。上述分析结果保证了 PSO 算法一旦在进化中探索到全局最优优点 x^* ，则所有微粒均渐近收敛于该点。

4.2 微粒群算法的代数分析

本节的内容主要参考[Maurice Clerc 2002]。在讨论中，首先给出一个简化模型，然后对该模型进行讨论。

为了给出微粒群算法的简化模型，我们做如下假设：

1) 用 p_{id} 取代 $\frac{\varphi_1 p_{id} + \varphi_2 p_{gd}}{\varphi_1 + \varphi_2}$ ，且为常数，设为 p ；

2) $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ ，常数且 $\varphi > 0$ ；

3) 搜索空间为 1 维空间，从而可去掉下标；

4) 种群数为 1，即只有一个微粒。

这样，经过简化的微粒群算法的进化方程为

$$\begin{cases} V(t+1) = V(t) + \varphi(p - V(t)) \\ X(t+1) = X(t) + V(t+1) \end{cases} \quad (4.30)$$

为了便于运算，将进化代数 t 置于下标，则 (4.30) 式可变为：

$$\begin{cases} V_{t+1} = V_t + \varphi(P - X_t) \\ X_{t+1} = X_t + V_{t+1} \end{cases} \quad (4.31)$$

若令 $y_t = P - X_t$ ，则微粒位置进化方程为

$$X_{t+1} = X_t + V_{t+1} = X_t + V_t + \varphi y_t \quad (4.32)$$

两边被 p 减，得到

$$y_{t+1} = y_t - V_t - \varphi y_t = -V_t + (1 - \varphi)y_t \quad (4.33)$$

这样，方程 (4.31) 可变为

$$\begin{cases} v_{t+1} = V_t + \varphi y_t \\ y_{t+1} = -V_t + (1 - \varphi)y_t \end{cases} \quad (4.34)$$

为了考虑问题方便，将 (4.34) 化为矩阵形式。令

$$P_t = \begin{bmatrix} V_t \\ y_t \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1 & \varphi \\ -1 & 1 - \varphi \end{bmatrix}$$

则进化方程 (4.34) 可简化为

$$P_{t+1} = MP_t \quad (4.35)$$

求解 (4.35)，得到如下结果

$$P_{t+1} = M^{t+1}P_0 \quad (4.36)$$

这表明该简化系统 (4.34) 完全由 M 确定。通过计算，可以得到 M 的两个特征根，分别为

$$\begin{cases} e_1 = 1 - \frac{\varphi}{2} + \frac{\sqrt{\varphi^2 - 4\varphi}}{2} \\ e_2 = 1 - \frac{\varphi}{2} - \frac{\sqrt{\varphi^2 - 4\varphi}}{2} \end{cases} \quad (4.37)$$

显然，如果存在矩阵 A，使得

$$AMA^{-1} = L = \begin{bmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & e_2 \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

则可令

$$Q_t = AP_t \quad (4.39)$$

从而方程 (4.35) 可变为

$$Q_{t+1} = LQ_t \quad (4.40)$$

即

$$Q_{t+1} = L^{t+1}Q_0 \quad (4.41)$$

这表明，矩阵 L 可完全确定该简化系统，由于 L 为对角矩阵，从而利用 L 将便于对系统的分析。但如何确定矩阵 A 呢？

满足 (4.38) 式的矩阵 A 不唯一，为此，我们取 $A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ c & 1 \end{bmatrix}$ 的形式，其中 a, c 为待定系数，

代入 (4.38)，得到

$$\begin{cases} a = \frac{\varphi + \sqrt{\varphi^2 - 4\varphi}}{2\varphi} \\ c = \frac{\varphi - \sqrt{\varphi^2 - 4\varphi}}{2\varphi} \end{cases} \quad (4.42)$$

为了使得 A 较为简单，矩阵乘以 2φ ，从而得到(4.40)

$$A = \begin{bmatrix} \varphi + \sqrt{\varphi^2 - 4\varphi} & 2\varphi \\ \varphi - \sqrt{\varphi^2 - 4\varphi} & 2\varphi \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

显然，当 $\varphi \neq 4$ 时，矩阵 A 才存在；否则，矩阵 A^{-1} 不存在。

下面我们将利用矩阵 L 对系统 (4.30) 进行讨论。由于矩阵 L 为对角矩阵，从而有

$$L^t = \begin{bmatrix} e_1^t & 0 \\ 0 & e_2^t \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

显然，若存在整数 t 和 k，使得下式成立，则系统将具有周期解。

$$Q_{t+k} = Q_t \quad (4.45)$$

此即

$$\begin{cases} e_1^t = 1 \\ e_2^t = 1 \end{cases} \quad (4.46)$$

下面具体考虑系统存在周期解的条件：

1、 $\varphi < 4$ 的情形

此时，由 φ 的定义可知 $0 < \varphi < 4$ ，从而矩阵 M 的特征根均为复根，若系统存在周期解，则

e_1, e_2 应满足下

$$\begin{cases} e_1 = \cos \vartheta + i \sin \vartheta \\ e_2 = \cos \vartheta - i \sin \vartheta \end{cases} \quad (4.47)$$

此时， $\cos \vartheta = 1 - \frac{\varphi}{2}$ ， $\sin \vartheta = \frac{\sqrt{4\varphi - \varphi^2}}{2}$ ，从而 (4.46) 式可变为

$$\begin{cases} e_1^t = \cos t\vartheta + i \sin t\vartheta \\ e_2^t = \cos t\vartheta - i \sin t\vartheta \end{cases} \quad (4.48)$$

从而存在周期解当且仅当 $\vartheta = \frac{2k\pi}{t}$ 。

因而，对于任意时间 t， φ 可按下式计

$$\varphi = 2(1 - \cos(\frac{2k\pi}{t})) \quad k = 1, 2, \dots, t-1$$

下面我们将给出状态 P_t 的大致范围估计。设 $\|X\|$ 表示矩阵（向量）的 2-范数，由 (4.39) 和

(4.41)，以及 $\|L\|=1$ ，从而有

$$\|Q_t\| = \|AP_t\| = \|Q_0\| \quad (4.49)$$

同时，由于 $\|Q_0\| = \|AP_t\| \leq \|A\| \times \|P_t\|$ ，从而有

$$\|P_t\| \geq \frac{\|Q_0\|}{\|A\|} \quad (4.50)$$

此外，由 (4.39) 及 (4.41)，我们有

$$P_t = A^{-1}Q_t = A^{-1}L'Q_0 \quad (4.51)$$

从而有

$$\|P_t\| = \|A^{-1}L'Q_0\| \leq \|A^{-1}\| \times \|L'\| \times \|Q_0\| = \|A^{-1}\| \times \|Q_0\| \quad (4.52)$$

综合 (4.50) 与 (4.52)，可以得到状态 P_t 的上下界限，即

$$\|A^{-1}\| \cdot \|Q_0\| \geq \|P_t\| \geq \frac{\|Q_0\|}{\|A\|} \quad (4.53)$$

比如当初始状态为 $P_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 时，第 t 代状态 P_t 的范围为

$$\begin{aligned} & \sqrt{2\varphi \cdot \max\left(\frac{1}{2} \left| \frac{3\varphi^2 - 4\varphi \pm \sqrt{5\varphi^4 - 8\varphi^3 + 16\varphi^2}}{2\varphi^4 - 8\varphi^3} \right| \right)} \\ & \geq \|P_t\| \\ & \geq \sqrt{\frac{2\varphi}{\max\left(|3\varphi^2 - 4\varphi \pm \sqrt{5\varphi^4 - 8\varphi^3 + 16\varphi^2}| \right)}} \end{aligned} \quad (4.54)$$

2、 $\varphi > 4$ 的情形

当 $\varphi > 4$ 时，显然 (4.37) 式表明特征根 e_1, e_2 均为实数，不妨设 $|e_1| \leq |e_2|$ ，为了保证系统存在周期解，由 (4.46) 我们有

A、 $e_1 = e_2 = 1$ ，此时 $\varphi = 0$ ，从而与 $\varphi > 4$ 矛盾。

B、 $e_1 = e_2 = -1$ ，此时 $\varphi = 4$ ，从而与 $\varphi > 4$ 矛盾。

C、 $e_1 = -e_2 = 1$ 或 $-e_1 = e_2 = 1$ ，与 (4.37) 矛盾，即不存在 φ 满足 (4.37)。

因此，对于 $\varphi > 4$ 的情形，不存在周期解。下面分析一下状态 P_t 的大致范围。由 (4.39) 与 (4.41)，可以得到

$$L'Q_0 = AP_t \quad (4.55)$$

即

$$\|P_t\| \geq \frac{\|L'Q_0\|}{\|A\|} \quad (4.56)$$

同时，由 (4.51) 有

$$\|P_t\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|L^t Q_0\| \quad (4.57)$$

这表明状态 P_t 的范数可以由 $\|L^0 Q_0\|$ 来决定。

3、 $\varphi = 4$ 的情形

由于 $\varphi = 4$ ，从而系数矩阵为

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

计算可得到两个相同的特征根-1，特征向量族为 $k \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ，从而若 $P_0 = \begin{bmatrix} v_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ 为一个特征向量，则

应满足 $v_0 + 2y_0 = 0$ ，从而有

$$P_{t+1} = -P_t \quad (4.58)$$

而当 $P_0 = \begin{bmatrix} v_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ 不是特征向量时，我们来估计一下状态 P_t 的范围。

取 $\Delta_t = \|P_{t+1}\| - \|P_t\|$ ，显然， Δ_t 应为 y_0 及 v_0 的函数，即

$$\Delta_t = a_t v_0^2 + b_t v_0 y_0 + c_t y_0^2 \quad (4.59)$$

其中，参数 a_t, b_t, c_t 为整数，且当 $\Delta_t = 0$ 时，成立 $v_0 + 2y_0 = 0$ 。

设对于某个 t ，使得 $\Delta_t > 0$ ，则显然有

$$\Delta_t = v_t^2 + 14v_t y_t + 24y_t^2 \quad (4.60)$$

从而 $\Delta_t > 0$ 当且仅当 $v_t \notin \begin{cases} [-2y_t, -12y_t], & \text{if } (y_t < 0) \\ [-12y_t, -2y_t], & \text{otherwise} \end{cases}$ 。

进一步计算，可以得到 Δ_{t+1} 的表达式为

$$\Delta_{t+1} = 11v_t^2 + 54v_t y_t + 64y_t^2 \quad (4.61)$$

且其根为 $v_t \in \{-2y_t, -\frac{32y_t}{11}\}$ ，由于 $\frac{32}{11} < 12$ ，这表明 $\Delta_{t+1} > 0$ ，即如果存在某代 t ，使得 $\|P_t\|$ 递

增，则它将会一直增加至无穷。因此，如果开始时 $\|P_0\|$ 递减，那么是否存在 t ，使得 $\|P_t\|$ 为递增呢？

为此，设 $\Delta_0 < 0$ ，从而 $v_0 \in \begin{cases} [-2y_0, -12y_0], & \text{if } (y_0 < 0) \\ [-12y_0, -2y_0], & \text{otherwise} \end{cases}$ ，不妨设 $y_0 > 0$ ，此时，可令

$$v_0 = -2y_0 - \varepsilon \quad (4.62)$$

其中， $\varepsilon \in (0, 10y_0)$ 。通过计算，可以得到

$$\Delta_0 = -10y_0\varepsilon + \varepsilon^2$$

$$\Delta_1 = -10y_0\varepsilon + 11\varepsilon^2$$

$$\Delta_2 = -10y_0\varepsilon + 21\varepsilon^2$$

继续迭代，可以得到

$$\Delta_{t+2} = -\Delta_t + 2\Delta_{t+1} = -10y_0\varepsilon + k_{t+2}\varepsilon^2$$

其中， $k_{t+2} = -k_t + 2k_{t+1}$ ，从而

$$\Delta_t = -10y_0\varepsilon + (1+10t)\varepsilon^2 \quad (4.63)$$

显然，如果 $(1+10t^2)\varepsilon^2 \leq 10y_0\varepsilon$ ，即

$$t \leq 1 + \text{Interger_part}\left(\frac{-\frac{1}{10} + y_0}{\varepsilon}\right) \quad (4.64)$$

则 $\|P_t\|$ 递减，反之，则 $\|P_t\|$ 递增（其中，Interger_part 为取整函数）。

我们还可以更加精确的描述 $\|P_t\|$ 。若设

$$\begin{aligned} \alpha &= -10y_0\varepsilon + \varepsilon^2 \\ \beta &= 10\varepsilon^2 \end{aligned}$$

则下式成立

$$\|P_t\| = t \sqrt{\left| \frac{\beta}{2} + \frac{(\alpha - \frac{\beta}{2})}{t} \right| + \frac{\|P_0\|^2}{t^2}} \quad (4.65)$$

4.3 微粒群算法的解析分析

从 (4.34) 通过计算可以得到下式：

$$\begin{aligned} v_{t+2} &= v_{t+1} + \varphi v_{t+1} \\ &= v_{t+1} - \varphi v_t + (1-\varphi)v_{t+1} - (1-\varphi)v_t \end{aligned} \quad (4.66)$$

经过整理，可得

$$v_{t+2} + (\varphi - 2)v_{t+1} + v_t = 0 \quad (4.67)$$

如果假设 v_t 为一个连续过程，则 (4.67) 式将是一个典型的二阶微分方程

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \ln(e_1 e_2) \frac{\partial v}{\partial t} + \ln e_1 \ln e_2 + v = 0 \quad (4.68)$$

其中， e_1, e_2 为下式的根

$$\lambda^2 + (\varphi - 2)\lambda + 1 = 0 \quad (4.69)$$

经过计算，可以得到

$$\begin{cases} e_1 = 1 - \frac{\varphi}{2} + \frac{\sqrt{\varphi^2 - 4\varphi}}{2} \\ e_2 = 1 - \frac{\varphi}{2} - \frac{\sqrt{\varphi^2 - 4\varphi}}{2} \end{cases} \quad (4.70)$$

从而得到微分方程 (4.68) 的通解为

$$v_t = c_1 e_1^t + c_2 e_2^t \quad (4.71)$$

由 (4.70) 可以得到

$$y_t = \frac{v_{t+1} - v_t}{\varphi} \quad (4.72)$$

将 v_t 的通解 (4.71) 代入 (4.72)，得到

$$y_t = \frac{c_1 e_1^t (e_1 - 1) + c_2 e_2^t (e_2 - 1)}{\varphi} \quad (4.73)$$

其中系数 c_1, c_2 由 v_0, y_0 决定，即如果 $e_1 \neq e_2$ 时，

$$\begin{cases} c_1 = \frac{-\varphi y_0 - (1 - e_2)v_0}{e_2 - e_1} \\ c_2 = \frac{\varphi y_0 + (1 - e_1)v_0}{e_2 - e_1} \end{cases} \quad (4.74)$$

如果 $e_1 = e_2$ 时，

$$\begin{cases} v_0 = c_1 + c_2 \\ y_0 = -\frac{c_1 + c_2}{2} \end{cases} \quad (4.75)$$

为了保证连续性，我们要式 (4.76) 成立。

$$v_0 + 2y_0 = 0 \quad (4.76)$$

显然，为了保证系统收敛，必须下式成立 $\begin{cases} |e_1| < 1 \\ |e_2| < 1 \end{cases}$

按照 (4.71) 和 (4.73) 所得到的公式，应为系统 (4.30) 的解析解。下面具体给出证明。

1) 证明 $v_t + \varphi y_t = v_{t+1}$

$$\begin{aligned} v_t + \varphi y_t &= c_1 e_1^t + c_2 e_2^t + (c_1 e_1^t (e_1 - 1) + c_2 e_2^t (e_2 - 1)) \\ &= e_1 c_1 e_1^t + e_2 c_2 e_2^t \\ &= v_{t+1} \end{aligned}$$

2) 证明 $y_{t+1} = -v_t + (1 - \varphi)y_t$

$$\begin{aligned} &-v_t + (1 - \varphi)y_t \\ &= -c_1 e_1^t - c_2 e_2^t + \frac{c_1 e_1^t (e_1 - 1) + c_2 e_2^t (e_2 - 1)}{\varphi} - (c_1 e_1^t (e_1 - 1) + c_2 e_2^t (e_2 - 1)) \\ &= \frac{1}{\varphi} [(e_1 c_1 e_1^t (e_1 - 1) + e_2 c_2 e_2^t (e_2 - 1)) - (e_1 c_1 e_1^t (e_1 - 1) + e_2 c_2 e_2^t (e_2 - 1))] \\ &\quad - \varphi c_1 e_1^t - \varphi c_2 e_2^t + (c_1 e_1^t (e_1 - 1) + c_2 e_2^t (e_2 - 1)) - \varphi (c_1 e_1^t (e_1 - 1) + c_2 e_2^t (e_2 - 1)) \\ &= \frac{1}{\varphi} [(e_1 c_1 e_1^t (e_1 - 1) + e_2 c_2 e_2^t (e_2 - 1)) - c_1 e_1^t (e_1^2 - (\varphi - 2)e_1 + 1) - c_2 e_2^t (e_2^2 - (\varphi - 2)e_2 + 1)] \\ &= y_{t+1} \end{aligned}$$

为了更好的考虑进化方程 (4.34) 的收敛性，我们将其拓展为具有五个参数的模型，并通过参数的选择来分析系统的收敛性能。其具体形式为

$$\begin{cases} v_{t+1} = \alpha v_t + \beta \varphi y_t \\ y_{t+1} = -\gamma v_t + (\delta - \eta \varphi) y_t \end{cases} \quad (4.77)$$

其系数矩阵 $M' = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \varphi \\ -\gamma & \delta - \eta \varphi \end{bmatrix}$

设 e_1', e_2' 为矩阵 M' 的特征根，则有

$$\begin{cases} v_t = c_1 (e_1')^t + c_2 (e_2')^t \\ y_t = \frac{1}{\beta \varphi} (c_1 (e_1')^t (e_1' - \alpha) + c_2 (e_2')^t (e_2' - \alpha)) \end{cases} \quad (4.78)$$

其中，系数 c_1, c_2 为

$$\begin{cases} c_1 = \frac{-\beta \varphi y_0 - (\alpha - e_2') v_0}{c_2' - c_1'} \\ c_2 = \frac{\beta \varphi y_0 + (\alpha - e_1') v_0}{c_2' - c_1'} \end{cases} \quad (4.79)$$

现在考虑收缩因子 χ_1 、 χ_2 对算法性能的影响，其中

$$\begin{cases} e_1' = \chi_1 e_1 \\ e_2' = \chi_2 e_2 \end{cases} \quad (4.80)$$

其中， e_1, e_2 满足 (4.70)。通过计算矩阵 M' 的特征根，可以得到 e_1', e_2' 的值，将 (4.80) 代入，可以得到收缩系数 χ_1 、 χ_2 与五个参数的关系。

$$\begin{cases} \chi_1 = \frac{\alpha + \delta - \eta\varphi + \sqrt{(\eta\varphi)^2 + 2\varphi(\alpha\eta - \delta\eta - 2\beta\gamma) + (\alpha - \delta)^2}}{2 - \varphi + \sqrt{\varphi^2 - 4\varphi}} \\ \chi_2 = \frac{\alpha + \delta - \eta\varphi - \sqrt{(\eta\varphi)^2 + 2\varphi(\alpha\eta - \delta\eta - 2\beta\gamma) + (\alpha - \delta)^2}}{2 - \varphi - \sqrt{\varphi^2 - 4\varphi}} \end{cases} \quad (4.81)$$

它等价于

$$\begin{cases} 2(\alpha + \delta - \eta\varphi) = (\chi_1 + \chi_2)(2 - \varphi) + (\chi_1 - \chi_2)\sqrt{\varphi^2 - 4\varphi} \\ 2\sqrt{(\eta\varphi)^2 + 2\varphi(\alpha\eta - \delta\eta - 2\beta\gamma) + (\alpha - \delta)^2} = (\chi_1 + \chi_2)\sqrt{\varphi^2 - 4\varphi} + (\chi_1 - \chi_2)(2 - \varphi) \end{cases}$$

若 χ_1 与 χ_2 为实数时，整理可得到下式

$$\begin{cases} \sqrt{|E|}(1 - \text{sign}(E))C - (\alpha + \delta - \eta\varphi + \frac{\sqrt{|E|}}{2}(1 + \text{sign}(E)))\sqrt{B}(1 - A) = 0 \\ \sqrt{|E|}(1 - \text{sign}(E))C' - (\alpha + \delta - \eta\varphi - \frac{\sqrt{|E|}}{2}(1 + \text{sign}(E)))\sqrt{B}(1 - A) = 0 \end{cases} \quad (4.82)$$

其中 sign 为符号函数，其中各符号满足

$$\begin{cases} A = \text{sign}(\varphi^2 - 4\varphi) \\ B = |\varphi^2 - 4\varphi| \\ C = 2 - \varphi + \frac{\sqrt{|\varphi^2 - 4\varphi|}}{2}(1 + \text{sign}(\varphi^2 - 4\varphi)) \\ C' = 2 - \varphi - \frac{\sqrt{|\varphi^2 - 4\varphi|}}{2}(1 + \text{sign}(\varphi^2 - 4\varphi)) \\ D = C^2 + \frac{|\varphi^2 - 4\varphi|}{4}(1 - \text{sign}(\varphi^2 - 4\varphi))^2 \\ E = (\eta\varphi)^2 + 2\varphi(\alpha\eta - \delta\eta - 2\beta\gamma) + (\alpha - \delta)^2 \end{cases} \quad (4.83)$$

将 (4.82) 的两个方程简化，可以得到

$$\begin{cases} \sqrt{|E|}(1 - \text{sign}(E))(2 - \varphi) - (\alpha + \delta - \eta\varphi)\sqrt{B}(1 - A) = 0 \\ \sqrt{|E|}\sqrt{B}\text{sign}(E)(1 + A) = 0 \end{cases} \quad (4.84)$$

式 (4.84) 的解通常不能完全独立于 φ ，比如，我们可以给出如下的一组解

$$\begin{cases} E > 0 \\ A = -1 (\Leftrightarrow \varphi < 4) \\ \alpha + \delta - \eta\varphi = 0 \end{cases} \quad (4.85)$$

当然，如果 $\alpha = \beta = \delta = \gamma = \eta = \chi \in R^+$ 时，若 $\chi_1 = \chi_2 = \chi$ ，则对于任何 φ ，式 (4.82) 均成立。

下面我们将讨论几个基于 (4.84) 的关系的模型。

1) 模型 1：当五个参数满足

$$\begin{cases} \alpha = \delta \\ \beta\gamma = \eta^2 \end{cases} \quad (4.86)$$

时，代入 (4.81)，并整理可以得到

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{4} (2(\chi_1 + \chi_2) + (\chi_1 - \chi_2)(\sqrt{\varphi^2 - 4\varphi} + \varphi \frac{2-\varphi}{\sqrt{\varphi^2 - 4\varphi}})) \\ \eta = \frac{1}{2} (\chi_1 + \chi_2 + \frac{2-\varphi}{\sqrt{\varphi^2 - 4\varphi}} (\chi_1 - \chi_2)) \end{cases} \quad (4.87)$$

如果再设 $\chi_1 = \chi_2 = \chi$ ，则结果可以简化为

$$\alpha = \beta = \delta = \gamma = \eta = \chi$$

且下式成立

$$\begin{cases} |e'_1| = \chi |e_1| \\ |e'_2| = \chi |e_2| \end{cases}$$

2) 模型 2：当五个参数满足

$$\begin{cases} \alpha = \beta \\ \gamma = \eta = \delta \end{cases} \quad (4.88)$$

时，代入 (4.81)，并整理可以得到

$$\begin{cases} \alpha = \frac{(\chi_1 + \chi_2)(2-\varphi) + (\chi_1 - \chi_2)\sqrt{\varphi^2 - 4\varphi}}{2} + \varphi - 1 \\ \eta = \frac{1}{4(\varphi-1)} ((\chi_1 + \chi_2)(\varphi-2) - (\chi_1 - \chi_2)\sqrt{\varphi^2 - 4\varphi}) \\ \mp \sqrt{2x_1^2(\varphi^2 - 4\varphi + 2 - \varphi\sqrt{\varphi^2 - 4\varphi}) + 2x_2^2(\varphi^2 - 4\varphi + 2 + \varphi\sqrt{\varphi^2 - 4\varphi}) + 8\chi_1\chi_2(2\varphi-1)} \end{cases} \quad (4.89)$$

如果再设 $\chi_1 = \chi_2 = \chi$ ，则结果可以简化为

$$\begin{cases} \alpha = (2 - \varphi)\chi + \varphi - 1 \\ \gamma = \chi \text{ or } \gamma = \frac{\chi}{\varphi - 1} \end{cases} \quad (4.90)$$

且如果 $\varphi \leq 2$ 时，下式成立

$$\begin{cases} |e_1'| = \chi(1 - \frac{\varphi}{2}) + \frac{\sqrt{\chi^2(4 - 4\varphi + \varphi^2) + 4\chi(\varphi - 2) + 4(\varphi - 1)}}{2} \leq \chi |e_1| = \chi \\ |e_2'| = \chi(1 - \frac{\varphi}{2}) - \frac{\sqrt{\chi^2(4 - 4\varphi + \varphi^2) + 4\chi(\varphi - 2) + 4(\varphi - 1)}}{2} \leq \chi |e_2| = \chi \end{cases}$$

3) 模型 3：当五个参数满足

$$\alpha = \beta = \gamma = \eta \quad (4.91)$$

时，代入 (4.81)，并整理可以得到

$$\alpha = \frac{2\delta + (\chi_1 + \chi_2)(\varphi - 2) - (\chi_1 - \chi_2)\sqrt{\varphi^2 - 4\varphi}}{2(\varphi - 1)} \quad (4.92)$$

4) 模型 4：当五个参数满足

$$\begin{cases} \alpha = \beta = 2\delta \\ \eta = 2\gamma \end{cases} \quad (4.93)$$

时，显然下式成立

$$\begin{cases} 2(3\delta - 2\gamma\varphi) = (\chi_1 + \chi_2)(2 - \varphi) + (\chi_1 - \chi_2)\sqrt{\varphi^2 - 4\varphi} \\ 2|2\gamma\varphi - \delta| = (\chi_1 + \chi_2)\sqrt{\varphi^2 - 4\varphi} + (\chi_1 - \chi_2)(2 - \varphi) \end{cases} \quad (4.94)$$

当 $\chi_1 = \chi_2 = \chi$ 时，结果可简化为

$$\begin{cases} 3\delta - 2\gamma\varphi = \chi(2 - \varphi) \\ |2\gamma\varphi - \delta| = \chi\sqrt{\varphi^2 - 4\varphi} \end{cases} \quad (4.95)$$

如果 $2\gamma\varphi > \delta$ ，则有

$$\begin{cases} \delta = \chi \frac{2 - \varphi + \sqrt{\varphi^2 - 4\varphi}}{2} = \chi e_1 \\ \gamma = \chi \frac{2 - \varphi + 3\sqrt{\varphi^2 - 4\varphi}}{4\varphi} \end{cases} \quad (4.96)$$

如设 $\Delta = \sqrt{\varphi^2 - 4\varphi}$ ，则有下式成立

$$\begin{cases} |e_1'| = \chi \left| \frac{3}{2} - \frac{3}{4}\varphi + \frac{3}{4}\Delta - \frac{1}{2}\varphi^2 + \frac{1}{4}\varphi^3 - \frac{3}{4}\varphi^2\Delta + \frac{1}{4} \right| 2 - \varphi - 2\varphi^2 - 2\varphi^3 + \Delta - 3\varphi^2\Delta \\ |e_2'| = \chi \left| \frac{3}{2} - \frac{3}{4}\varphi + \frac{3}{4}\Delta - \frac{1}{2}\varphi^2 + \frac{1}{4}\varphi^3 - \frac{3}{4}\varphi^2\Delta - \frac{1}{4} \right| 2 - \varphi - 2\varphi^2 - 2\varphi^3 + \Delta - 3\varphi^2\Delta \end{cases} = \chi |e_1|$$

为了使得系统 (4.77) 为一连续系统, 必须满足

$$(\eta\varphi)^2 - 4\beta\gamma\varphi + (\alpha - \delta)^2 + 2\eta\varphi(\alpha - \delta) \geq 0 \quad (4.97)$$

经过简化, (4.97) 式可变为

$$\beta\gamma(-\beta\gamma + \eta(\alpha - \delta)) > 0 \quad (4.98)$$

如果假设这五个参数均为正, 则有

$$\beta\gamma < \eta(\alpha - \delta) \quad (4.99)$$

下面将考虑如何使得所有的特征值均为正? 由于

$$\begin{cases} e_1' > 0 \\ e_2' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e_1' + e_2' > 0 \\ e_1'e_2' > 0 \end{cases}$$

因而有

$$\begin{cases} \alpha(\delta - \eta\varphi) + \gamma\beta\varphi > 0 \\ \alpha + \delta - \eta\varphi > 0 \end{cases} \quad (4.100)$$

显然, (4.100) 式等价于

$$\begin{cases} \det(M) > 0 \\ \text{trace}(M) > 0 \end{cases} \quad (4.101)$$

其中, $\det(M)$ 表示矩阵 M 的行列式, $\text{trace}(M)$ 表示矩阵 M 的迹。故如果 φ 的最大值 φ_{\max} 存在,

则 (4.100) 可简化为

$$\begin{cases} \frac{\alpha\delta}{\alpha\eta - \beta\gamma} > \varphi_{\max} \\ \frac{\alpha + \delta}{\eta} > \varphi_{\max} \end{cases} \quad (4.102)$$

3、例子

在下面的范例中, 取 $\alpha = \beta = 1$, $\delta = \eta$, 此时条件变为

$$\begin{cases} \delta < \frac{1}{\varphi_{\max}} \\ \frac{\delta(\varphi_{\max} - 1)}{\varphi_{\max}} < \gamma < \delta(1 - \delta) \end{cases} \quad (4.103)$$

比如取

$$\begin{cases} \varphi_{\max} = 10 \\ y_0 = 0, v_0 = 1 \\ \alpha = \beta = 1 \\ \gamma = \frac{1}{2} \left(\frac{\delta(\varphi_{\max} - 1)}{\varphi_{\max}} + \delta(1 - \delta) \right) = 0.08915 \end{cases}$$

以及
$$\delta = \eta = \frac{0.99}{\varphi_{\max}} = 0.099$$

则系统在 25 代时将会迅速收敛，图 2 给出了 $\varphi = 4$ 的一个系统的收敛情形。

但是，是否只要参数为实数，系统就会收敛呢？换句话说，是否下式成立

$$\begin{cases} \frac{\alpha\delta}{\alpha\eta - \beta\gamma} > \varphi_{\max} \\ \frac{\alpha + \delta}{\eta} > \varphi_{\max} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |e_1'| < 1 \\ |e_2'| < 1 \end{cases}$$

对此问题，我们可举反例如下，若参数满足下面的选择

$$\begin{cases} \varphi_{\max} = 10 \\ y_0 = 0 \\ v_0 = 1 \\ \alpha = \beta = 1.1 \\ \gamma = 0.0891495 \\ \delta = \eta = 0.099 \end{cases}$$

显然，关系 (4.102) 成立

$$\begin{cases} \frac{\alpha\delta}{\alpha\eta - \beta\gamma} = 10.05 > \varphi_{\max} \\ \frac{\alpha + \delta}{\eta} = 12.11 > \varphi_{\max} \end{cases}$$

但当 $\varphi = 0.1$ 时，系统不收敛，因为 $|e_1'| = 1.09 > 1$ 。

4.4 微粒群算法的状态空间模型

在这节中，我们将考虑满足下列条件的收敛性问题

$$\begin{cases} |e_1'| < 1 \\ |e_2'| > 1 \end{cases} \quad (4.104)$$

此时，由于 y_t, v_t 均为复数，故整个系统可由五元数组 $\{\text{Re}(y), \text{Im}(y), \text{Re}(v), \text{Im}(v), \varphi\}$ 来决定。

本节将对 4.3 节介绍的几个特例增加收缩系数来考虑其收敛性。

1、模型 1 的改进

$$\begin{cases} v_{t+1} = \chi(v_t + \varphi y_t) \\ y_{t+1} = -\chi(v_t + (1-\varphi)y_t) \end{cases} \quad (4.105)$$

显然，当 $\chi < \min(\frac{1}{|e_1|}, \frac{1}{|e_2|})$ 时，系统收敛。但 $|e_1| \leq |e_2|$ ，因此，收缩系数可定为

$$\chi = \frac{\kappa}{|e_2|} \quad (4.106)$$

其中， $\kappa \in (0,1)$ 。

2、模型 2 的改进
进化方程为

$$\begin{cases} v_{t+1} = \chi(v_t + \varphi y_t) \\ y_{t+1} = -v_t + (1-\varphi)y_t \end{cases} \quad (4.107)$$

因而收缩系数应为

$$\chi = \frac{\kappa}{|e_2|} \quad (4.108)$$

其中， $\kappa \in (0,1)$ ，然而我们可以看到，(4.108) 式成立当且仅当 $\varphi \in (0,2)$ 。因而需要寻找其它方式的收缩系数的定义。

通过计算，可以得到其系数矩阵的特征根 e_2' 为

$$e_2' = \frac{\chi + 1 - \varphi}{2} - \frac{\sqrt{(\chi - 1)^2 + \varphi^2 - 2\varphi - 2\chi\varphi}}{2} \quad (4.109)$$

显然， e_2' 为复数当且仅当 $\chi \in (1 + \varphi - 2\sqrt{\varphi}, 1 + \varphi + 2\sqrt{\varphi})$ ，此时， $|e_2'| = \sqrt{\chi}$ 。因而，如果 $1 + \varphi - 2\sqrt{\varphi} < 1$ ，即 $\varphi < 4$ ，为了保证收敛，则 $\chi \in (1 + \varphi - 2\sqrt{\varphi}, 1)$ 。因而，可以定义

$$\chi = \frac{2 + \varphi - 2\sqrt{\varphi}}{2}$$

其中， $0 < \varphi < 4$ 。那么，能否找到一个更大的 φ ，使得进化方程收敛？回答是否定的。因为，

当 $\varphi > 4$ 时， e_2' 是实数，且其绝对值为

A、当 $\alpha \in (0, 1 + \varphi - 2\sqrt{\varphi})$ ，随着 φ 的增加， e_2' 递减且其最小值为 $\sqrt{\varphi} - 1$ ；

B、当 $\alpha \in (1 + \varphi - 2\sqrt{\varphi}, +\infty)$ ，随着 φ 的增加， e_2' 递减且其最小值为 1

3、模型 3 的改进

$$\begin{cases} v_{t+1} = \chi(v_t + \varphi y_t) \\ y_{t+1} = -\chi v_t + (1 - \chi\varphi)y_t \end{cases} \quad (4.110)$$

由于这个模型与前面的模型不太相同，我们稍微进行一些讨论其系数矩阵为

$$M = \begin{bmatrix} \chi & \chi\varphi \\ -\chi & 1 - \chi\varphi \end{bmatrix}$$

为了计算特征值，我们得到下面方程

$$Z^2 - \text{trace}(M)Z + \det(M) = 0 \quad (4.111)$$

或者表示成

$$Z^2 - (\chi + 1 - \chi\varphi)Z + \chi = 0 \quad (4.112)$$

从而可以得到两个特征值

$$\begin{cases} e_1' = \frac{\chi + 1 - \chi\varphi + \sqrt{\Delta}}{2} \\ e_2' = \frac{\chi + 1 - \chi\varphi - \sqrt{\Delta}}{2} \end{cases} \quad (4.113)$$

其中，

$$\begin{aligned} \Delta &= \text{trace}(M)^2 - 4\det(M) \\ &= \chi^2(\varphi^2 - 4\varphi + 2\varphi(1 - \frac{1}{\chi}) + (1 - \frac{1}{\chi})^2) \end{aligned} \quad (4.114)$$

这表明，当 $\varphi \in (1 + (\frac{1}{\chi} - \frac{2}{\sqrt{\chi}}), 1 + (\frac{1}{\chi} + \frac{2}{\sqrt{\chi}}))$ 时， $\Delta < 0$ ，此时，特征值为复数，且模为 $\sqrt{\chi}$ 。

显然，当 $\chi < 1$ 时，算法收敛。但是是否存在能够满足较大的 φ 时仍然收敛的 χ ？如果行的话，其特征值的模应为

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{2\kappa}{\varphi - 2 + \sqrt{\varphi^2 - 4\varphi}}}, \text{if } (\varphi > 4) \\ \sqrt{\kappa}, \text{otherwise} \end{cases} \quad (4.115)$$

此时，为了寻找收缩系数 χ 所满足的公式，我们可作如下分析：

A、 $\det(M) = \chi$ ；

B、系统应收敛于 M^T

此时，我们首先假设其满足

$$\chi = \frac{\kappa}{|e_2|} \quad (4.116)$$

其中, $\kappa \in (0,1)$ 。这意味着

$$\begin{cases} \frac{2\kappa}{\varphi - 2 + \sqrt{\varphi^2 - 4\varphi}}, & \text{if } (\varphi > 4) \\ \kappa, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4.117)$$

显然, 当 $\varphi \in [\varphi_{\min}, \varphi_{\max}]$ 时, Δ 为负。且 φ_{\max} 的一般形式比较复杂 (它为 κ^6 的多项式函数, 且其中部分系数为一个 κ^4 的方程的根)。因此, 我们考虑一些特例, 比如当 $\varphi_{\min} < 4$ 时, 则 $\chi = \kappa$,

且通过求解 $\Delta = 0$, 可以得到 $\varphi_{\min} = \frac{\kappa^2 + \kappa - 2\kappa^{\frac{3}{2}}}{\kappa^2}$, 当且仅当 $\kappa < \frac{1}{9}$ 时成立。表 4.1 给出一些取值。

表 4.1、 κ 的取值对 φ_{\min} 、 φ_{\max} 的影响

κ	φ_{\min}	φ_{\max}
0.4	0.3377	8.07
0.99	0.000025	39799.76